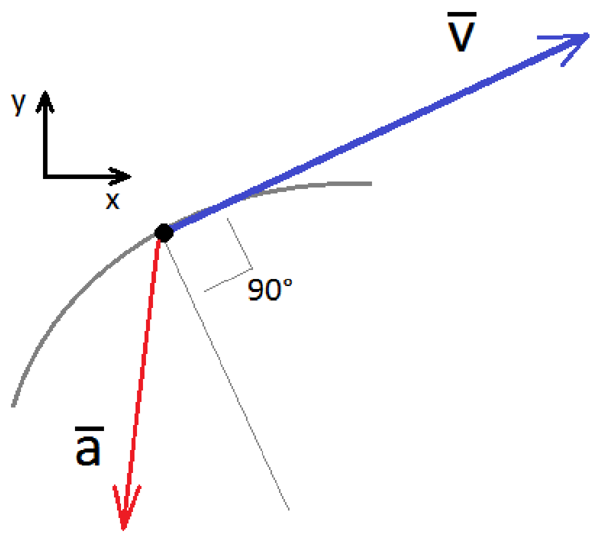
Ejercicio cinemática: coordenadas intrínsecas

Una partícula realiza un movimiento curvilíneo en el plano. En un instante determinado, la velocidad es $\vec{v} = 4\frac{m}{s}\hat{\imath} + 3\frac{m}{s}\hat{\jmath}$ y la aceleración es $\vec{a} = -1\frac{m}{s^2}\hat{\imath} - 3\frac{m}{s^2}\hat{\jmath}$.

Expresar al vector aceleración en coordenadas intrínsecas.



Nuestra tarea es expresar el vector aceleración de la forma:

$$\vec{a} = a_T\,\hat{t} + a_N\,\hat{n}$$

- a_T: Componente tangencial de la aceleración
- $\hat{t}$: Versor tangencial
- a_N: Componente normal de la aceleración
- $\hat{n}$: Versor normal

Método 1:

Paso 1: Hallar el versor tangencial.

El versor tangencial tiene la misma dirección y sentido que el vector velocidad, pero su norma es unitaria, podemos entonces hallarlo de la siguiente forma:

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\hat{t} = \frac{4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

$$\hat{t} = \frac{4\hat{\imath}}{\sqrt{25}} + \frac{3\hat{\jmath}}{\sqrt{25}}$$

$$\hat{t} = 0.8\,\hat{\imath} + 0.6\,\hat{\jmath}$$

Observación: Se puede verificar rápidamente que $|\hat{t}| = 1$.

<u>Paso 2:</u> Hallar la componente y la aceleración tangencial.

Para hallar la componente tangencial de la aceleración, realizamos el producto escalar entre el vector aceleración y el versor tangencial expresado en cartesianas.

El producto escalar $\vec{a} \cdot \hat{t}$ nos da la proyección de $\vec{a}$ en el eje tangencial. Entonces:

$$a_T = \vec{a} \cdot \hat{t}$$

$$a_T = (-1\,, -3) \cdot (0.8\ , 0.6)$$

$$a_T = -0.8 + (-3)0.6$$

$$a_T = -2.6\,\frac{m}{s^2}$$

Expresado vectorialmente:

$$\vec{a}_T = -2.6\,\frac{m}{s^2}\ \hat{t}$$

<u>Paso 3:</u> Hallar la componente normal de la aceleración.

Sabemos que la aceleración puede expresarse por la suma entre la aceleración tangencial y la normal:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

En donde:

- $\vec{a}_T = a_T\,\hat{t}$
- $\vec{a}_N = a_N\,\hat{n}$

Despejamos $\vec{a}_N$:

$$\vec{a}_N = \vec{a} - \vec{a}_T$$

$$\vec{a}_N = \vec{a} - a_T\,\hat{t}$$

$$\vec{a}_N = \overbrace{\left(-1\frac{m}{s^2}\hat{\imath} - 3\frac{m}{s^2}\hat{\jmath}\right)}^{\vec{a}} - \overbrace{\left(-2.6\ \frac{m}{s^2}\right)}^{a_T}\overbrace{(0.8\ \hat{\imath} + 0.6\ \hat{\jmath})}^{Versor\ \hat{t}}$$

$$\vec{a}_N = (-1\hat{\imath} - 3\hat{\jmath})\frac{m}{s^2} - (-2.08\ \hat{\imath} - 1.56\hat{\jmath})\frac{m}{s^2}$$

$$\vec{a}_N = (-1\hat{\imath} - 3\hat{\jmath})\frac{m}{s^2} + (2.08\ \hat{\imath} + 1.56\hat{\jmath})\frac{m}{s^2}$$

$$\vec{a}_N = 1.08\frac{m}{s^2}\ \hat{\imath}\ \ - 1.44\frac{m}{s^2}\ \hat{\jmath}$$

Para hallar la componente a_N (sabiendo que siempre $a_N > 0$) simplemente tomo el módulo de $\vec{a}_N$.

$$a_N = |\vec{a}_N| = \sqrt{1.08^2 + 1.44^2}\,\frac{m}{s^2} = 1.8\frac{m}{s^2}$$

<u>Paso 4:</u> Hallar el versor normal.

Hallamos el versor normal de manera análoga a como hallamos el versor tangencial:

$$\hat{n} = \frac{\vec{a}_N}{|\vec{a}_N|} = \frac{1.08\ \hat{\imath}\ \ - 1.44\ \hat{\jmath}}{1.8}$$

$$\hat{n} = 0.6\ \hat{\imath} - 0.8\hat{\jmath}$$

Expresamos entonces al vector aceleración en coordenadas intrínsecas:

$$\vec{a} = a_T\ \hat{t} + \ a_N\ \hat{n}$$

$$\boldsymbol{\vec{a} = -2.6\ \frac{m}{s^2}\ \hat{t} + \ 1.8\ \frac{m}{s^2}\ \hat{n}}$$

<u>Segundo método</u>

La obtención del versor tangencial y la componente tangencial de la aceleración es igual que en los pasos (1) y (2) del método anterior:

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\hat{t} = 0.8\ \hat{\imath} + 0.6\ \hat{\jmath}$$

$$a_T = \ \vec{a}\cdot\ \hat{t} = -2.6\ \frac{m}{s^2}$$

Paso 3: Hallar el versor normal.

El vector normal $\hat{n}$ es perpendicular al tangencial. Por lo tanto, el producto escalar entre ambos versores debe dar cero.

$$\hat{n} \cdot \hat{t} = 0$$

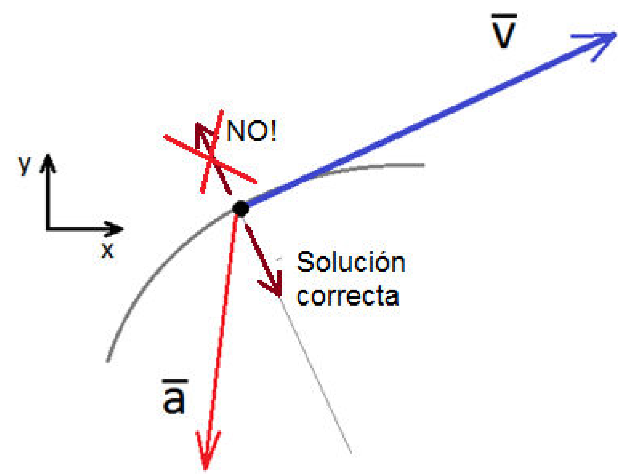
Como es un movimiento en el plano, podemos hallar $\hat{n} = (n_x; n_y)$ a partir del versor tangencial. Simplemente invertimos las componentes de este último y cambiamos el signo a una de ellas. Nos dará dos posibles soluciones:

$$\hat{n} = \begin{cases} (-0.6; 0.8) \\ (0.6\,; -0.8) \end{cases}$$

Verificar que las dos soluciones satisfacen que $\hat{n} \cdot \hat{t} = 0$.

Ahora bien, ¿Con cuál de las dos soluciones nos quedamos?

Nos quedaremos con la que apunte hacia el centro de curvatura.



Viendo la anterior imagen y el sistema de referencia adoptado, es fácil darse cuenta que la solución correcta es la que $n_x > 0$ y $n_y < 0$.

Por lo tanto, el versor normal es:

$$\hat{n} = 0.6\,\hat{\imath} - 0.8\hat{\jmath}$$

<u>Paso 3:</u> Hallar la componente normal de la aceleración.

Para hallar la componente a_N tengo dos formas:

a. **Utilizando la relación pitagórica:**

$$a^2 = {a_T}^2 + {a_N}^2$$

$$a_N = \sqrt{a^2 - {a_T}^2}$$

$$a_T = \frac{m}{s^2}\sqrt{(1^2 + 3^2) - 2.6^2}$$

$$a_N = \frac{m}{s^2}\sqrt{3.24}$$

$$a_N = 1.8\ \frac{m}{s^2}$$

b. **Proyectando el vector aceleración en el eje normal mediante el producto escalar:**

$$a_N = \vec{a} \cdot \hat{n}$$

$$a_N = (-1\ ,-3) \cdot (0.6\ \ ,-0.8)$$

$$a_N = 1.8\frac{m}{s^2}$$

Finalmente expresamos el vector aceleración en coordenadas intrínsecas:

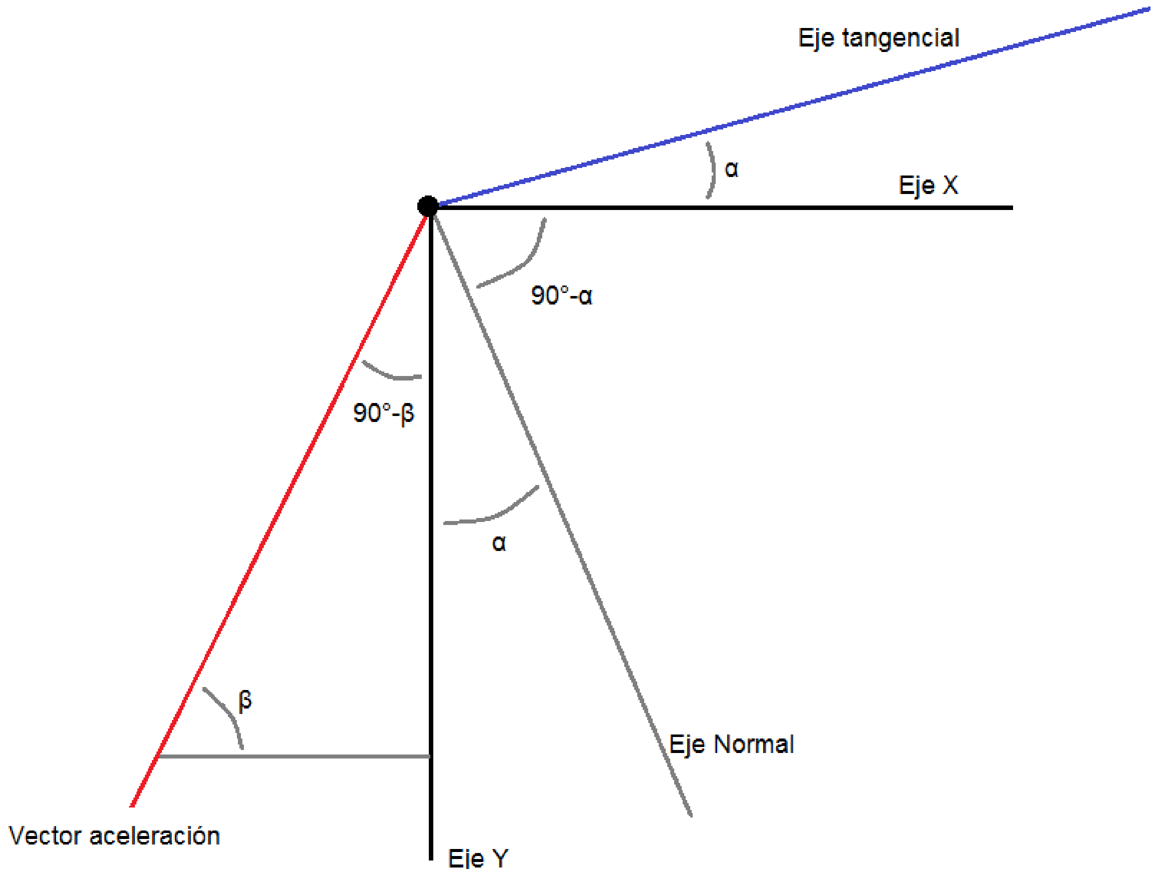
$$\boldsymbol{\vec{a} = -2.6\ \frac{m}{s^2}\ \hat{t} + 1.8\ \frac{m}{s^2}\ \hat{n}}$$

<u>Tercer método</u>

La idea de este método es encontrar el ángulo que hay entre el vector aceleración y el eje normal o tangencial.

Una vez hallado, se descompone el vector aceleración en los ejes intrínsecos.

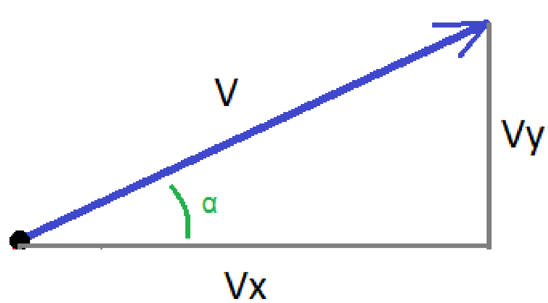
Tal como se ilustra en la siguiente imagen, Llamamos α al ángulo entre el eje tangencial y el eje X, y llamamos β al ángulo entre el segmento rojo paralelo al vector aceleración y el eje X.



Se observa en el gráfico que el ángulo entre el eje normal y el segmento rojo es:

$$\varphi = (90° - \beta) + \alpha$$

Utilizamos la función $\tan^{-1}$ para hallar α:

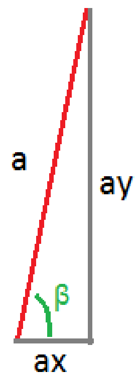


$$\alpha = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{3}{4}$$

$$\alpha = 36.87°$$

Hacemos lo mismo para hallar β:



$$\beta = \tan^{-1}\frac{a_y}{a_x}$$

$$\beta = \tan^{-1}\frac{3}{1}$$

$$\beta = 71.565°$$

Por lo tanto el ángulo que forma el vector aceleración con la normal es:

$$\varphi = (90° - \beta) + \alpha$$

$$\varphi = (90° - 71.565°) + 36.87°$$

$$\varphi = 55.305°$$

Una vez obtenido φ, proyectamos el vector aceleración en los ejes intrínsecos:

$$a_N = |\vec{a}|\cos\varphi = \sqrt{1^2 + 3^2}\,\frac{m}{s^2}\,\cos(55.305°) = \sqrt{10}\frac{m}{s^2}\ \cdot\ 0.569 = 1.8\ \frac{m}{s^2}$$

$$|a_T| = |\vec{a}|\sin\varphi = \sqrt{1^2 + 3^2}\,\frac{m}{s^2}\,\sin(55.305°) = \sqrt{10}\frac{m}{s^2}\ \cdot\ 0.822 = 2.6\ \frac{m}{s^2}$$

Notar que la proyección de la aceleración en el eje tangencial es opuesta al versor tangencial. O sea que está disminuyendo la rapidez de la partícula $\left(\frac{d|\vec{v}|}{dt} < 0\right)$. Por lo tanto, debemos colocarle el signo **"-"** a la componente tangencial:

$$a_T = -2.6\ \frac{m}{s^2}$$

Llegamos entonces a la misma expresión que los dos métodos anteriores:

$$\boldsymbol{\vec{a} = -2.6\ \frac{m}{s^2}\ \hat{t} + 1.8\ \frac{m}{s^2}\ \hat{n}}$$